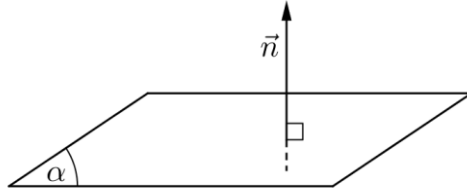


HÌNH HỌC 11 – CHƯƠNG 3
§2. PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẪNG
TIẾT 1

A. PHẦN KIẾN THỨC CHÍNH

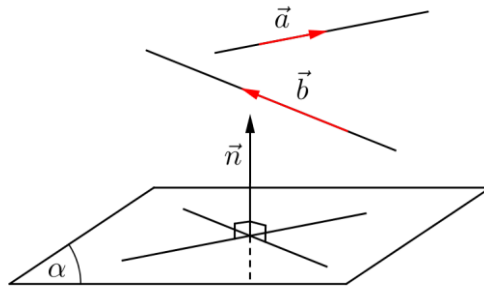
I. Vector pháp tuyến của mặt phẳng

➤ **Định nghĩa.** Cho mặt phẳng (α) . Nếu vector $\vec{n}$ có giá vuông góc với (α) thì được gọi là vector pháp tuyến (VTPT) của (α) .



➤ **Nhận xét.** Nếu vector $\vec{n}$ là VTPT của (α) thì $k\vec{n}$ ($k \in \mathbb{R}^*$) cũng là VTPT của (α) .

➤ **Chú ý.** Nếu hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$ không cùng phương và có giá song song hoặc nằm trên mặt phẳng (α) thì $\vec{n} = [\vec{a}, \vec{b}]$ là VTPT của mặt phẳng (α) .

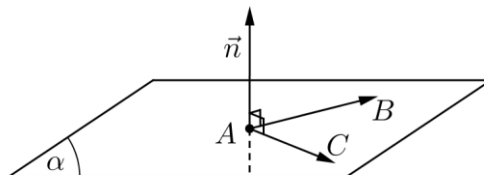


Tích có hướng của hai vector

Cho hai vector $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ và $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$. Tích có hướng của hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là

$$\vec{n} = [\vec{a}, \vec{b}] = \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right) = (a_2b_3 - a_3b_2; a_3b_1 - b_3a_1; a_1b_2 - b_1a_2).$$

Nhận xét. Cho mặt phẳng (α) đi qua ba điểm A, B, C . Khi đó $mp(\alpha)$ có một VTPT là $\vec{n} = [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]$.



➤ **Ví dụ 1.** Trong không gian $Oxyz$ cho ba điểm không thẳng hàng $A(0;1;2)$, $B(1;-1;1)$ và $C(-4;3;2)$.

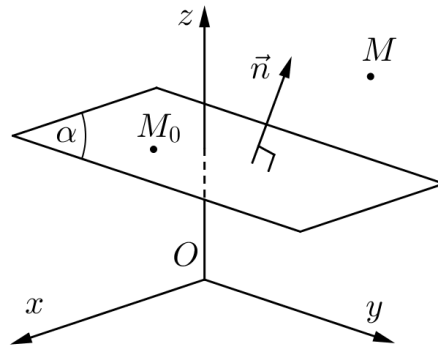
a) Tìm tọa độ một VTPT của mặt phẳng đi qua ba điểm A, B, C .

Lời giải.

a) Ta có $\overrightarrow{AB} = (1; -2; -1)$ và $\overrightarrow{AC} = (-4; 2; 0)$. Suy ra $\vec{n} = [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (2; 4; -6)$.

II. Phương trình tổng quát của mặt phẳng

Trong không gian $Oxyz$ cho mặt phẳng (α) qua điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$ và có VTPT $\vec{n} = (A; B; C)$



Với $M(x; y; z)$ bất kì, ta có

$$\begin{aligned} M \in (\alpha) &\Leftrightarrow \vec{n} \cdot \overrightarrow{MM_0} = 0 \\ &\Leftrightarrow A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \quad (1) \\ &\Leftrightarrow Ax + By + Cz - Ax_0 - By_0 - Cz_0 = 0 \\ &\Leftrightarrow Ax + By + Cz + D = 0 \quad (2) \end{aligned}$$

trong đó, $D = -(Ax_0 + By_0 + Cz_0)$ và $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$.

➤ **Định nghĩa.** Phương trình (2) được gọi là phương trình tổng quát của mặt phẳng (α) nhận $\vec{n} = (A; B; C)$ làm vector pháp tuyến.

➤ **Ví dụ 1.** Trong không gian $Oxyz$ cho ba điểm không thẳng hàng $A(0; 1; 2)$, $B(1; -1; 1)$ và $C(-4; 3; 2)$.

a) Tìm tọa độ một VTPT của mặt phẳng đi qua ba điểm A, B, C .

b) Viết phương trình tổng quát của mặt phẳng (α) .

Lời giải.

Nhắc lại câu a) Ta có $\overrightarrow{AB} = (1; -2; -1)$ và $\overrightarrow{AC} = (-4; 2; 0)$. Suy ra $\vec{n} = [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (2; 4; -6)$.

b) Mặt phẳng (α) có VTPT $\vec{n} = (2; 4; -6)$ và đi qua $A(0; 1; 2)$.

Phương trình mặt phẳng (α) là $2(x - 0) + 4(y - 1) - 6(z - 2) = 0 \Leftrightarrow x + 2y - 3z + 4 = 0$.

➤ **Ví dụ 2.** Trong không gian $Oxyz$ cho $(Q): x - 3y + 1 = 0$. Tọa độ một VTPT của mặt phẳng (Q) là

A. $(1; -3; 1)$.

B. $(-3; 1; 0)$.

C. $(1; -3; 0)$.

D. $(-2; 6; -2)$.

Lời giải.

Chọn C

➤ **Ví dụ 3.** Trong không gian $Oxyz$, phương trình nào sau đây không phải là phương trình tổng quát của mặt phẳng?

A. $2x - y = 0$.

B. $z + 1 = 0$.

C. $mx + (2m - 1)y - z - 2 = 0$.

D. $Ax + 2Ay + 3Az - 4 = 0$.

Lời giải.

Chọn D

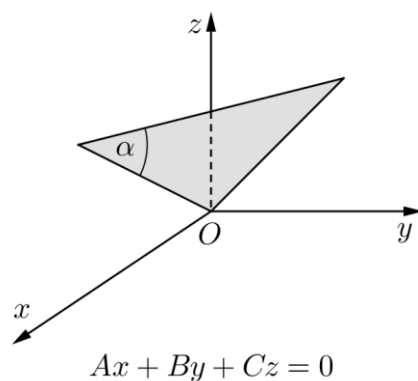
Nếu $A = 0$, vi phạm điều kiện VTPT của mặt phẳng khác vector $\vec{0}$.

Muốn câu D đúng thì phải thêm điều kiện $A \neq 0$, khi đó VTPT là $(1; 2; 3)$.

2. Các trường hợp riêng

Trong không gian $Oxyz$ cho mặt phẳng $(\alpha): Ax + By + Cz + D = 0$ (1).

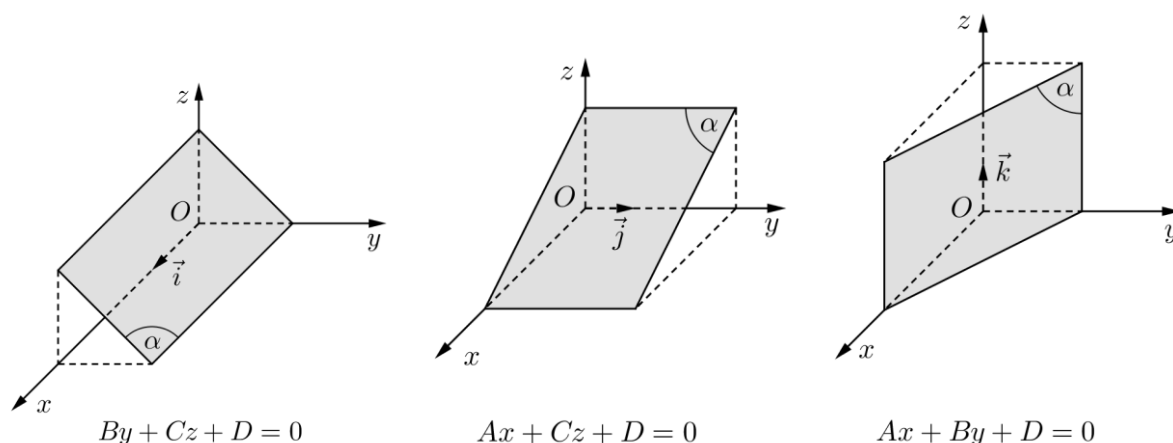
+ Nếu $D = 0$ thì mặt phẳng (α) đi qua gốc tọa độ.



+ Nếu $A = 0$ thì mặt phẳng (α) song song hoặc chứa trục Ox .

+ Nếu $B = 0$ thì mặt phẳng (α) song song hoặc chứa trục Oy .

+ Nếu $C = 0$ thì mặt phẳng (α) song song hoặc chứa trục Oz .



II. PHƯƠNG TRÌNH TỔNG QUÁT CỦA MẶT PHẪNG

2. Các trường hợp riêng

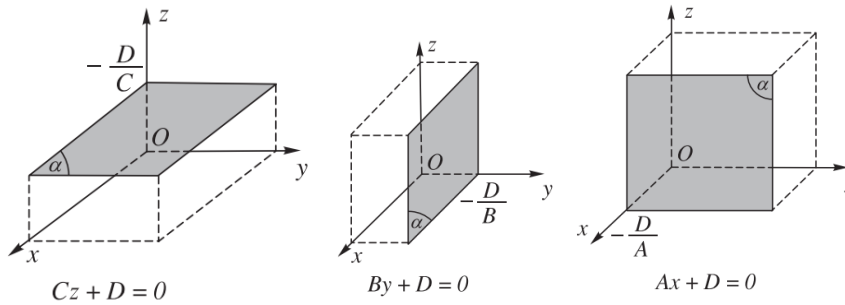
Trong không gian $Oxyz$ cho mặt phẳng $(\alpha): Ax + By + Cz + D = 0$ (1)

c) Nếu hai trong ba hệ số A, B, C bằng 0

+ Nếu $A=B=0$ và $C \neq 0$ thì (α) song song hoặc trùng với mặt phẳng (Oxy) .

+ Nếu $A=C=0$ và $B \neq 0$ thì (α) song song hoặc trùng với mặt phẳng (Oxz) .

+ Nếu $B=C=0$ và $A \neq 0$ thì (α) song song hoặc trùng với mặt phẳng (Oyz) .



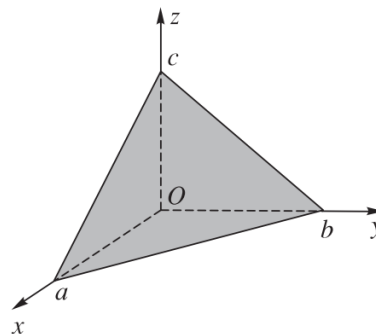
➤ Nhận xét:

Nếu cả bốn hệ số A, B, C, D đều khác 0 thì phương trình

$$Ax + By + Cz + D = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \quad (2).$$

Với $a = -\frac{D}{A}, b = -\frac{D}{B}, c = -\frac{D}{C}$.

Ta gọi phương trình (2) là phương trình mặt phẳng theo đoạn chắn.



C. LUYỆN TẬP VÀ VẬN DỤNG

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Dạng 1. Tìm véc tơ pháp tuyến của mặt phẳng

Bài 1. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(Q): 3y + 1 = 0$. Tọa độ một VTPT của mặt phẳng (Q) là:

A. $(3;1;0)$.

B. $(0;0;3)$.

C. $(3;0;0)$.

D. $(0;3;0)$

Lời giải

Chọn D

Bài 2. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $-x + 3y + 2z + 1 = 0$. Tọa độ một VTPT của mặt phẳng là:

A. $(3;2;1)$.

B. $(1;3;2)$.

C. $(2;-6;-4)$

D. $(-1;3;1)$.

Lời giải

Chọn C

Bài 3. Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng (P) chứa $\vec{b} = (0; 2; 1)$ và song song $\vec{a} = (-1; 2; 3)$. Mặt phẳng (P) có VTPT là:

- A. $\vec{n} = (2; 1; -4)$. **B. $\vec{n} = (-4; 1; -2)$.** C. $\vec{n} = (1; -4; 2)$. D. $\vec{n} = (1; 2; -4)$.

Lời giải

Chọn B

VTPT của mặt phẳng (P) là:

$$\vec{n} = [\vec{a}, \vec{b}] = \left(\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \right) = (-4; 1; -2). \text{ Chọn đáp án B}$$

Dạng 2. Viết phương trình mặt phẳng khi biết một điểm và VTPT

Bài 4. Viết phương trình tổng quát của mặt phẳng đi qua điểm $N(-1; 2; 0)$ và có VTPT $\vec{a} = (2; 2; -4)$

- A. $2x + 2y - 4z + 4 = 0$. B. $-x - 2y + z - 2 = 0$.
C. $x + y - 2z + 2 = 0$. **D. $2x + 2y - 4z - 2 = 0$.**

Lời giải

Chọn D

$$\text{Mặt phẳng cần tìm có } \begin{cases} \text{VTPT } \vec{n} = (2; 2; -4) \\ \text{qua } N(-1; 2; 0) \end{cases}$$

Phương trình mặt phẳng là:

$$2(x+1) + 2(y-2) - 4(z-0) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x + 2y - 4z - 2 = 0$$

Bài 5. Viết phương trình tổng quát của mặt phẳng đi qua điểm $N(-1; 0; 2)$ và vuông góc với vec tơ $\vec{a} = (2; 4; -6)$

- A. $2x + 4y - 6z + 5 = 0$. B. $-x - 2y - 3z + 5 = 0$.
C. $x + 2y - 3z + 7 = 0$. D. $x + 2y - 3z + 10 = 0$.

Lời giải

Chọn C.

$$\text{Mặt phẳng cần tìm có } \begin{cases} \text{VTPT } \vec{n} = (2; 4; -6) \\ \text{qua } N(-1; 0; 2) \end{cases}$$

Phương trình mặt phẳng là:

$$2(x+1) + 4(y-0) - 6(z-2) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x + 4y - 6z + 14 = 0$$

$$\Leftrightarrow x + 2y - 3z + 7 = 0$$

Dạng 3. Viết phương trình mặt phẳng theo đoạn chắn

Bài 6. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;0;0); B(0;-2;0); C(0;0;5)$. Mặt phẳng đi qua 3 điểm A, B, C có phương trình là:

A. $x - 2y + 5z = 0$.

B. $x - 2y + 5z - 1 = 0$.

C. $\frac{x}{1} + \frac{y}{-2} + \frac{z}{5} = 0$.

D. $\frac{x}{1} + \frac{y}{-2} + \frac{z}{5} = 1$.

Lời giải

Chọn D

Bài 7. Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng đi qua $G(1;2;3)$ và cắt các trục $Ox; Oy; Oz$ tại điểm A, B, C với G là trọng tâm $\triangle ABC$ có phương trình là:

A. $x + 2y + 3z = 0$.

B. $\frac{x}{1} + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} = 1$.

C. $\frac{x}{1} + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} = 0$.

D. $\frac{x}{3} + \frac{y}{6} + \frac{z}{9} = 1$.

Lời giải

Chọn D

Giả sử (P) cắt các trục $Ox; Oy; Oz$ lần lượt tại $A(a;0;0); B(0;b;0); C(0;0;c)$

$$\Rightarrow (P): \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

$$\text{Vì } G(1;2;3) \text{ là trọng tâm } \triangle ABC \text{ nên } \begin{cases} x_A + x_B + x_C = 3.x_G \\ y_A + y_B + y_C = 3.y_G \\ z_A + z_B + z_C = 3.z_G \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 6 \\ c = 9 \end{cases}$$

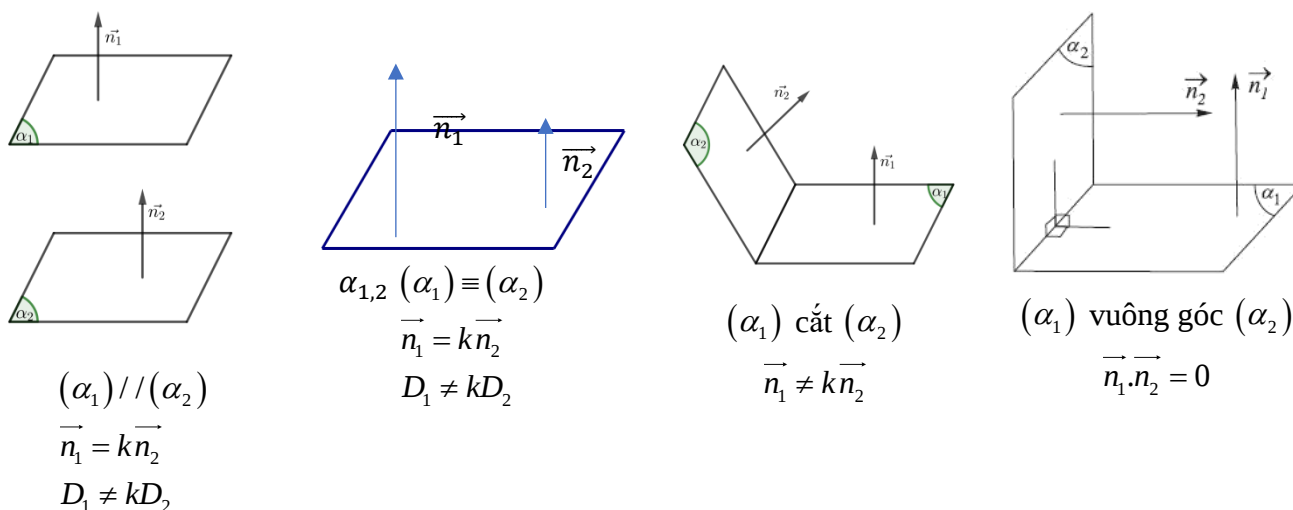
$$\text{Vậy phương trình mặt phẳng } (P): \frac{x}{3} + \frac{y}{6} + \frac{z}{9} = 1.$$

TIẾT 2

III. ĐIỀU KIỆN ĐỂ HAI MẶT PHẪNG SONG SONG, VUÔNG GÓC

1. Lý thuyết

Cho hai mặt phẳng $(\alpha_1): A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ và $(\alpha_2): A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$



2. Các ví dụ minh họa

➤ **Ví dụ 1.** Cho hai mặt phẳng (α) và (β) có phương trình $(\alpha): x - 2y + 3z + 1 = 0$

$$(\beta): 2x - 4y + 6z + 1 = 0$$

Có nhận xét gì về vector pháp tuyến của chúng?

Lời giải

$$\vec{n}_\alpha = (1; -2; 3)$$

$$\vec{n}_\beta = (2; -4; 6) = 2(1; -2; 3)$$

$$\vec{n}_\beta = 2\vec{n}_\alpha$$

➤ **Ví dụ 2.** Viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua điểm $M(1; -2; 3)$ và song song với mặt phẳng $(\beta): 2x - 3y + z + 5 = 0$.

Lời giải

Vì mặt phẳng (α) song song với mặt phẳng (β) nên (α) có vector pháp tuyến $\vec{n} = (2; -3; 1)$.

Mặt phẳng (α) đi qua điểm $M(1; -2; 3)$ có phương trình: $2(x-1) - 3(y+2) + 1(z-3) = 0$ hay $2x - 3y + z - 11 = 0$.

➤ **Ví dụ 3.** Viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua hai điểm $A(3; 1; -1)$, $B(2; -1; 4)$ và vuông góc với mặt phẳng (β) có phương trình: $2x - y + 3z - 1 = 0$.

Lời giải

Gọi $\vec{n}_\beta$ là vector pháp tuyến của mặt phẳng (β) . Hai vector không cùng phương có giá song song hoặc nằm trên (α) là: $\vec{AB} = (-1; -2; 5)$, $\vec{n}_\beta = (2; -1; 3)$.

Do đó mặt phẳng (α) có vector pháp tuyến: $\vec{n}_\alpha = \vec{AB} \wedge \vec{n}_\beta = (-1; 13; 5)$.

Vậy phương trình của (α) là: $-1(x-3) + 13(y-1) + 5(z+1) = 0$.

Hay $x - 13y - 5z + 5 = 0$.

3. Các bài tập trắc nghiệm

Bài 1. Trong không gian $Oxyz$ cho mặt phẳng (P) phương trình: $2x - 3y + 4z + 20 = 0$ và $(Q): 4x - 13y - 6z + 40 = 0$. Vị trí tương đối của (P) và (Q) là:

A. Song song.

B. Trùng nhau.

C. **Cắt nhưng không vuông góc.**

D. Vuông góc.

Lời giải

Chọn C

Mặt phẳng (P) có VTPT $\vec{n}_P = (2; -3; 4)$ mặt phẳng (Q) có VTPT $\vec{n}_Q = (4; -13; -6)$.

Ta có tỉ số: $\frac{2}{4} \neq \frac{-3}{-13}$. Do đó (P) cắt (Q) . (1)

Lại có $\vec{n}_Q \cdot \vec{n}_P = 24 + (-3) \cdot (-13) + 4 \cdot (-6) = 23 \neq 0$. (P) không vuông góc (Q) . (2)

Bài 2. Trong không gian $Oxyz$, hai mặt phẳng nào sau đây song song với nhau?

A. $(P): 2x - y + z - 5 = 0$ và $(Q): -4x + 2y - 2z + 10 = 0$.

B. $(R): x - y + z - 3 = 0$ và $(S): 2x - 2y + 2z + 6 = 0$.

C. $(T): x - y + z = 0$ và $(K): \frac{x}{2} - \frac{y}{2} + \frac{z}{2} = 0$.

D. $(X): 3x - y + 2z - 3 = 0$ và $(Z): 6x - 2y - 6 = 0$.

Lời giải

Chọn B

Xét hai mặt phẳng (R) và (S) ta có $\frac{1}{2} = \frac{-1}{2} = \frac{1}{2} \neq \frac{-3}{6} \Rightarrow (R) // (S)$.

Xét các cặp còn lại ta thấy chúng không song song.

Bài 3. Trong không gian $Oxyz$ cho hai mặt phẳng $(P): x - 3y + 2z + 1 = 0$ và $(Q): (2m - 1)x + m(1 - 2m)y + (2m - 4)z + 14 = 0$. Mặt phẳng $(P) \perp (Q)$ khi m bằng bao nhiêu?

A. $m = 1; -\frac{3}{2}$.

B. $m = -1; -\frac{3}{2}$.

C. $m = 2$.

D. $m = \frac{3}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có (P) có VTPT $\vec{n}_P = (1; -3; 2)$.

Mặt phẳng (Q) có VTPT $\vec{n}_Q = (2m - 1; -2m^2 + m; 2m - 4)$.

Để $(P) \perp (Q)$ thì $\vec{n}_P \perp \vec{n}_Q \Leftrightarrow \vec{n}_P \cdot \vec{n}_Q = 0 \Leftrightarrow (2m - 1) \cdot 1 + (-2m^2 + m) \cdot (-3) + (2m - 4) \cdot 2 = 0$

$$\Leftrightarrow 6m^2 + 3m - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = \frac{-3}{2} \end{cases}$$

Bài 4. Trong không gian $Oxyz$ cho hai mặt phẳng $(P): 2x - y - z - 3 = 0$ và $(Q): x - z - 2 = 0$. Tính góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) .

A. 30° .

B. 45° .

C. 60° .

D. 90° .

Lời giải

Chọn A

Ta có VTPT của (P) và (Q) lần lượt là $\vec{n}_P = (2; -1; -1); \vec{n}_Q = (1; 0; -1)$.

$$\text{Khi đó } \cos[(P); (Q)] = \left| \cos(\vec{n}_P; \vec{n}_Q) \right| = \frac{|2 + 0 + 1|}{\sqrt{4 + 1 + 1} \cdot \sqrt{1 + 1}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Suy ra hai mặt phẳng (P) và (Q) hợp nhau một góc bằng 30° .

Bài 5. Trong không gian $Oxyz$, cho tứ diện $ABCD$ có $A(0; 2; 0); B(2; 0; 0); C(0; 0; \sqrt{2}); D(0; -2; 0)$. Số đo góc của hai mặt phẳng (ABC) và (ACD) là?

A. 30° .

B. 45° .

C. 60° .

D. 90° .

Lời giải

Chọn C

Ta có VTPT của (ABC) là $\vec{n}_1 = [\vec{AB}; \vec{AC}] = (-2\sqrt{2}; -2\sqrt{2}; -4)$.

VTPT của (ACD) là $\vec{n}_2 = [\vec{AC}; \vec{AD}] = (4\sqrt{2}; 0; 0)$.

Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (ACD)

$$\text{Ta có } \cos \varphi = \left| \cos(\vec{n}_1; \vec{n}_2) \right| = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{|4\sqrt{2} \cdot (-2\sqrt{2})|}{\sqrt{(-2\sqrt{2})^2 + (-2\sqrt{2})^2 + 4} \cdot \sqrt{(4\sqrt{2})^2}} = \frac{1}{2}.$$

Suy ra $\varphi = 60^\circ$.

Bài 6. Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng (α) đi qua điểm $A(2; -1; 1)$ và vuông góc hai mặt phẳng $(P): 2x - z + 1 = 0$ và $(Q): y = 0$. Phương trình của mặt phẳng (α) là:

A. $2x + y - 4 = 0$.

B. $x + 2z - 4 = 0$.

C. $x + 2y + z = 0$.

D. $2x - y + z = 0$.

Lời giải

Chọn B

Ta có VTPT của (P) và (Q) lần lượt là $\vec{n}_P = (2; 0; -1); \vec{n}_Q = (0; 1; 0)$.

Khi đó $\vec{n}_\alpha = [\vec{n}_P, \vec{n}_Q] = (1; 0; 2)$.

Mặt phẳng (α) đi qua điểm $A(2; -1; 1)$ nhận $\vec{n}_\alpha = (1; 0; 2)$ làm VTPT nên có phương trình $(\alpha): x + 2z - 4 = 0$.

Bài 7. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $P(2; 0; -1)$; $Q(1; -1; 3)$ và mặt phẳng $(P): 3x + 2y - z + 5 = 0$. Gọi (α) là mặt phẳng đi qua P, Q và vuông góc với (P) . Phương trình của (α) là

A. $-7x + 11y + z - 3 = 0$.

B. $7x - 11y + z - 1 = 0$.

C. $-7x + 11y + z + 15 = 0$.

D. $7x - 11y - z + 1 = 0$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\vec{PQ} = (-1; -1; 4)$, mặt phẳng (P) có VTCP là $\vec{n}_P = (3; 2; -1)$.

Suy ra $[\vec{PQ}, \vec{n}_P] = (-7; 11; 1)$.

Mặt phẳng (α) đi qua $P(2; 0; -1)$ và nhận $[\vec{PQ}, \vec{n}_P] = (-7; 11; 1)$ là một VTPT nên có phương trình là $(\alpha): -7x + 11y + z + 15 = 0$.

1. Khoảng cách từ một điểm đến mặt phẳng.

Trong không gian $Oxyz$ cho điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ và mặt phẳng

$(\alpha): Ax + By + Cz + D = 0$. Khi đó khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (α) là:

$$d(M, (\alpha)) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

B. LUYỆN TẬP

I. Các ví dụ

➤ **VD1:** Tính khoảng cách từ điểm $M(1; 3; -2)$ đến $(\alpha): 2x - y + 2z + 1 = 0$.

Lời giải

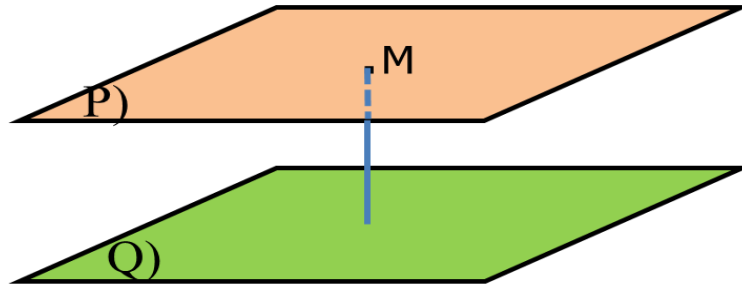
Áp dụng khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (α) là:

$$d(M, (\alpha)) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Ta có: $d(M, (\alpha)) = \frac{|2 \cdot 1 - 3 + 2 \cdot (-2) + 1|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2}} = \frac{4}{3}$

➤ **VD2:** Tính khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song (P) và (Q) biết: $(P): x + 3y + z - 1 = 0$; $(Q): x + 3y + z + 3 = 0$.

Lời giải



Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song bằng khoảng cách từ điểm bất kì thuộc mặt phẳng này đến mặt phẳng kia.

Ta lấy điểm $M(0;0;1) \in (P)$ và kí hiệu $d((P), (Q))$ là khoảng cách giữa hai mặt phẳng (P) và

$$(Q), \text{ ta có: } d((P), (Q)) = d(M, (Q)) = \frac{|0 + 3 \cdot 0 + 1 + 3|}{\sqrt{1^2 + 3^2 + 1^2}} = \frac{4}{\sqrt{11}}$$

II. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1: [Mức độ 1] Tính khoảng cách từ điểm $M(1;2;1)$ đến $(P): x - 3y + z + 15 = 0$.

A. $\frac{10}{\sqrt{11}}$.

B. $\sqrt{11}$.

C. $\frac{11}{\sqrt{5}}$.

D. 11.

Lời giải

Chọn B

Lời giải

$$d(M, (\alpha)) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

$$\text{Ta có: } d(M, (P)) = \frac{|1 - 3 \cdot 2 + 1 + 15|}{\sqrt{1^2 + (-3)^2 + 1^2}} = \sqrt{11}$$

Câu 2: [Mức độ 1] Trong không gian Oxyz, khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song: $(P): x + 2y + 2z - 10 = 0$ và $(Q): x + 2y + 2z - 3 = 0$.

A. $\frac{8}{3}$.

B. $\frac{7}{3}$.

C. 3.

D. $\frac{4}{3}$.

Lời giải

Chọn B

Ta lấy điểm $M(0;0;5) \in (P)$ và kí hiệu $d((P), (Q))$ là khoảng cách giữa hai mặt phẳng (P) và

$$(Q), \text{ ta có: } d((P), (Q)) = d(M, (Q)) = \frac{|0 + 2 \cdot 0 + 2 \cdot 5 - 3|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2}} = \frac{7}{3}$$

Câu 3: [Mức độ 2] Trong không gian Oxyz, Mặt cầu (S) có tâm $I(2;1;3)$ và tiếp xúc với mặt phẳng $(P): x + 2y + 2z + 2 = 0$, phương trình mặt cầu là:

A. $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 16$.

B. $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 4$.

C. $(x+1)^2 + (y+2)^2 + (z+3)^2 = 16$.

D. $(x+1)^2 + (y+2)^2 + (z+3)^2 = 4$.

Lời giải

Chọn A

Ta có bán kính mặt cầu chính là khoảng cách từ điểm $I(2;1;3)$ đến $(P): x+2y+2z+2=0$.

$$\text{Ta có: } R = d(I, (P)) = \frac{|2+2.1+2.3+2|}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}} = 4.$$

Nên phương trình mặt cầu là: $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 16$

Câu 4: [Mức độ 2] Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $I(2;3;5)$ phương trình mặt cầu tâm I và tiếp xúc với mặt phẳng (Oxy) là:

A. $(x-2)^2 + (y-3)^2 + (z-5)^2 = 5.$

B. $(x-2)^2 + (y-3)^2 + (z-5)^2 = 10.$

C. $(x+2)^2 + (y+3)^2 + (z+5)^2 = 25.$

D. $(x-2)^2 + (y-3)^2 + (z-5)^2 = 25.$

Lời giải

Chọn D

Ta có phương trình với mặt phẳng (Oxy) là $z=0$.

bán kính mặt cầu chính là khoảng cách từ điểm $I(2;3;5)$ đến (Oxy) .

$$\text{Ta có: } R = d(I, (Oxy)) = \frac{|5|}{\sqrt{1}} = 5.$$

Nên phương trình mặt cầu là: $(x-2)^2 + (y-3)^2 + (z-5)^2 = 25.$

Câu 5: [Mức độ 2] Trong không gian $Oxyz$, điểm M thuộc trục Oy và cách đều hai mặt phẳng $(P): x+y-z+1=0$ và $(Q): x-y+z-5=0$ có tọa độ là:

A. $M(0;-3;0).$

B. $M(0;3;0).$

C. $M(0;-2;0).$

D. $M(0;1;0).$

Lời giải

Chọn A

Ta có: $M \in Oy \Rightarrow M(0; y; 0)$, theo giả thiết

$$d(M, (P)) = d(M, (Q)) \Leftrightarrow \frac{|y+1|}{\sqrt{3}} = \frac{|-y-1|}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \begin{cases} y+1 = -y-5 \\ y+1 = y+5 \end{cases} \Leftrightarrow y = -3$$

Vậy $M(0;-3;0).$

Câu 6: [Mức độ 2] Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng $(P): 2x+2y-z+6=0$ cắt mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 25$ theo một giao tuyến là đường tròn (C) . Diện tích của hình tròn (C) là:

A. $16\pi.$

B. $4\pi.$

C. $8\pi.$

D. $\sqrt{20}\pi.$

Lời giải

Chọn A

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;2;3)$ và bán kính $R=5$ Gọi H là hình chiếu của I lên (P) . Khi đó

$IH = d(I, (P))$ là khoảng cách từ I đến (P) .

$$IH = d(I, (P)) = \frac{|2.1 + 2.2 - 3 + 6|}{\sqrt{2^2 + 2^2 + (-1)^2}} = 3 \text{ mặt phẳng } (P) \text{ cắt mặt cầu } (S) \text{ theo một giao tuyến là}$$

đường tròn (C) có tâm là H , bán kính r và

$$r = \sqrt{R^2 - h^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4.$$

Diện tích của hình tròn (C) là: $S = \pi r^2 = \pi 4^2 = 16\pi$.

Câu 7: [Mức độ 3] Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng (P) đi qua $A(1; 7; 2)$ và cách $M(-2; 4; -1)$ một khoảng cách lớn nhất có phương trình là:

A. $(P): 3x + 3y + 3z - 10 = 0$.

B. $(P): x + y + z + 1 = 0$.

C. $(P): x + y + z - 10 = 0$.

D. $(P): x + y + z + 10 = 0$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $d(M; (P)) \leq MA$

Nên $d(M; (P))$ lớn nhất $d(M; (P)) = MA$ khi đó A là hình chiếu của M lên (P) .

Suy ra $AM \perp (P)$ nên $\overrightarrow{AM}(-3; -3; -3)$ là vecto pháp tuyến của (P)

mặt phẳng (P) đi qua $A(1; 7; 2)$ nên có phương trình là: $(P): 3(x-1) + 3(y-7) + 3(z-2) = 0$

hay $(P): x + y + z - 10 = 0$.

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 8: [2H3-2.6-1] Trong không gian $Oxyz$, khoảng cách từ điểm $M(1; -4; 5)$ đến mặt phẳng (Oxz) bằng

A. 5.

B. 1.

C. $\sqrt{42}$.

D. 4.

Lời giải

Chọn D

Mặt phẳng (Oxz) có phương trình là $y = 0$.

Vậy: $d(M, (Oxz)) = |-4| = 4$.

Câu 9: [2H3-2.6-1] Cho mặt phẳng $(\alpha): 2x - y + 2z - 6 = 0$ và điểm $M(2; -3; 5)$. Khoảng cách từ M đến mặt phẳng (α) là

A. 5.

B. $\frac{11}{3}$.

C. $\frac{5}{3}$.

D. $\frac{17}{3}$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có: } d(M, (\alpha)) = \frac{|2.2 - (-3) + 2.5 - 6|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2}} = \frac{11}{3}.$$

Câu 10: [2H3-2.6-2] Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(\alpha): x-2y-2z+4=0$ và $(\beta): x-2y-2z+7=0$. Tính khoảng cách giữa hai mặt phẳng (α) và (β) .

- A.** 1. **B.** $\frac{2}{3}$. **C.** 6. **D.** 3.

Lời giải

Chọn A

Lấy điểm $M(1;2;2)$ thuộc mặt phẳng (β) .

Vì hai mặt phẳng (α) và (β) song song với nhau nên

$$d((\alpha), (\beta)) = d(M, (\alpha)) = \frac{|1-4-4+4|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+(-2)^2}} = 1.$$

Câu 11: [2H3-2.6-2] Cho mặt phẳng $(P): x-2y+z-3=0$ và điểm $M(m;1;2)$ với $m \in \mathbb{R}$. Tìm tất cả giá trị của m sao cho khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (P) bằng $2\sqrt{6}$.

- A.** $m=-9; m=-15$. **B.** $m=9; m=15$. **C.** $m=-9; m=15$. **D.** $m=9; m=-15$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $(P): x-2y+z-3=0$ và $M(m;1;2)$

$$\Rightarrow d(M, (P)) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{|m - 2 \cdot 1 + 2 - 3|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 1^2}} = 2\sqrt{6} \Leftrightarrow |m-3| = 12 \Leftrightarrow \begin{cases} m=15 \\ m=-9 \end{cases}$$

Câu 12: [2H3-2.6-2] Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, khoảng cách từ tâm mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 4y - 4z - 1 = 0$ đến mặt phẳng $(P): x+2y+2z-10=0$ bằng

- A.** $\frac{7}{3}$. **B.** 0. **C.** $\frac{4}{3}$. **D.** $\frac{8}{3}$.

Lời giải

Chọn B

Mặt cầu có tâm $I(2;2;2)$ và bán kính $R = \sqrt{13}$.

Áp dụng công thức tính khoảng cách từ điểm đến mặt phẳng ta có:

$$d(I; (P)) = \frac{|2+2 \cdot 2+2 \cdot 2-10|}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}} = 0.$$

Câu 13: [2H3-2.7-2] Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x+y+z+1=0$. Viết phương trình mặt cầu có tâm $I(1;1;0)$ và tiếp xúc với $mp(P)$.

- A.** $(x-1)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 3$. **B.** $(x-1)^2 + (y-1)^2 + z^2 = \sqrt{3}$.
C. $(x+1)^2 + (y+1)^2 + z^2 = \sqrt{3}$. **D.** $(x+1)^2 + (y+1)^2 + z^2 = 3$.

Lời giải

Chọn A

• Bán kính mặt cầu $R = d(I, (P)) = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$.

• Vậy phương trình mặt cầu là $(x-1)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 3$.